令和５年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業

福岡県
高校生科学技術コンテスト
ファーストステージ

数学

注意事項

１　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
２　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れなどに気付いた場合は，挙手をして監督者に知らせなさい。ただし，問題内容にかかわる質問は，受け付けません。
３　解答用紙には，解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って正しく記入しなさい。
　⑴ 受 験 番 号 欄…受験票に記入されている受験番号を記入しなさい。
　⑵ 氏　　名　　欄…氏名を楷書で記入しなさい。
　⑶ 所 属 校 名 欄…受験票に記入されている所属校名を記入しなさい。
４　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

受 験 番 号	
氏　　　名	
所 属 校 名	

福岡県教育委員会

第１問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。

問１（i）$(x+y)(x^2-xy+y^2)$ を展開せよ。

（ii）x^3+8y^3 を因数分解せよ。

（iii）$40x^3-135y^3$ を因数分解せよ。

問２　a，b を実数の定数とする。2 次方程式 $x^2-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{b}{2}=0$ ……① は，$x=2$ を解にもつ。

（i）b を a を用いて表せ。

（ii）① が $x=2$ を重解にもつとき，定数 a，b の値を求めよ。

（iii）2 次方程式 $x^2-\dfrac{b}{2}x+\dfrac{a}{2}=0$ は，$x=1$ を解にもつとする。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

問３　座標平面に 2 点 A$(-2,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ をとる。点 B を通り直線 AB に垂直な直線と x 軸との交点を C とする。また，直線 AB の $x>0$ の部分に x 座標が t $(t>0)$ の点 D をとる。さらに，点 D を通り直線 AB に垂直な直線と x 軸との交点を E とする。

（i）点 C の座標を求めよ。

（ii）点 E の x 座標を t を用いて表せ。

（iii）(△ABC の面積)：(△ADE の面積) $=1:16$ のとき，t の値を求めよ。

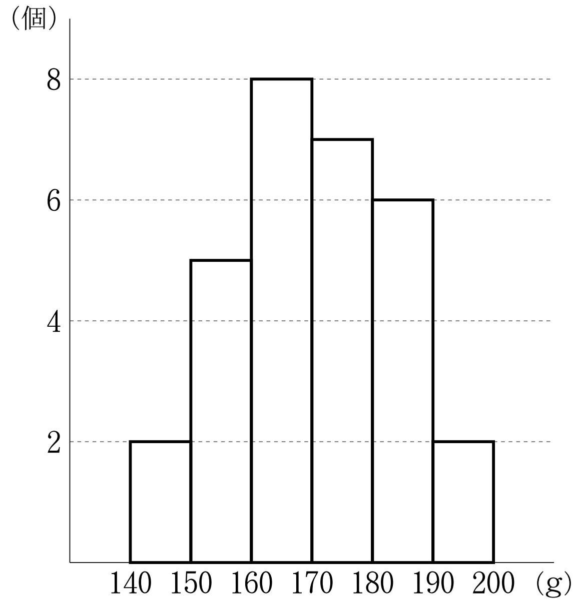
問４　K，A，G，A，K，U の 6 文字を並べてできる文字列について考える。

（i）並べてできる文字列は全部で何通りあるか求めよ。

（ii）2 つの K が隣り合っている，または 2 つの A が隣り合っている文字列は全部で何通りあるか求めよ。

（iii）2 つの K が隣り合っておらず，かつ 2 つの A も隣り合っていない文字列は全部で何通りあるか求めよ。

問５　次の図は，ある野菜 30 個について，その質量を計測し，結果をヒストグラムにまとめたものである。ただし，各階級は 140 g 以上 150 g 未満のように区切っている。



（ｉ） 質量 170 g 以上 180 g 未満の野菜は何個あるか。

（ii） 質量 180 g 以上の野菜は何個あるか。

(iii) このデータの第３四分位数は，どの階級に属しているか。

第２問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。**問３**については，解答に至るまでの過程も記述せよ。

ある企業が製造，販売している商品 A について考える。A の 1 kg 当たりの販売価格を p（万円），販売量を q（kg）とする。ただし，p, q は正の実数である。このとき，p, q は次の $(*)$ を満たすものとする。

$$p = 40 - q \quad \cdots\cdots (*)$$

A を q（kg）製造するのにかかる費用を C（万円）とし，売り上げは pq（万円），利益は売り上げから費用を除いた $pq - C$（万円）であるとする。また，消費税などは考えないものとする。

問１　$C = q^2 + 8q + 16$ とする。次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に当てはまる数として最も適切なものを答えよ。

(i)　売り上げが 300 万円となるのは，

$$(p,\ q) = \left(\boxed{ア},\ \boxed{イ}\right),\ \left(\boxed{ウ},\ \boxed{エ}\right)$$

のときである。ただし，$\boxed{ア} < \boxed{ウ}$ とする。

(ii)　利益が 80 万円となるのは，

$$(p,\ q) = \left(\boxed{オ},\ \boxed{カ}\right),\ \left(\boxed{キ},\ \boxed{ク}\right)$$

のときである。ただし，$\boxed{オ} < \boxed{キ}$ とする。

(iii)　利益の最大値は $\boxed{ケ}$ 万円であり，そのときの p, q の値は

$$(p,\ q) = \left(\boxed{コ},\ \boxed{サ}\right)$$

である。

問２　**問１(iii)** の p の値を p_1 とする。また，

$C = q^2 + 8q + 17$ のときの利益が最大となるような p の値を p_2，

$C = q^2 + 12q + 16$ のときの利益が最大となるような p の値を p_3

とする。

p_1，p_2，p_3 の大小関係として正しいものを以下の ①～⑨ のうちから一つ選び，番号で答えよ。

① $p_1 < p_2 < p_3$　　② $p_1 < p_3 < p_2$　　③ $p_3 < p_1 < p_2$

④ $p_2 < p_1 < p_3$　　⑤ $p_3 < p_1 = p_2$　　⑥ $p_2 < p_1 = p_3$

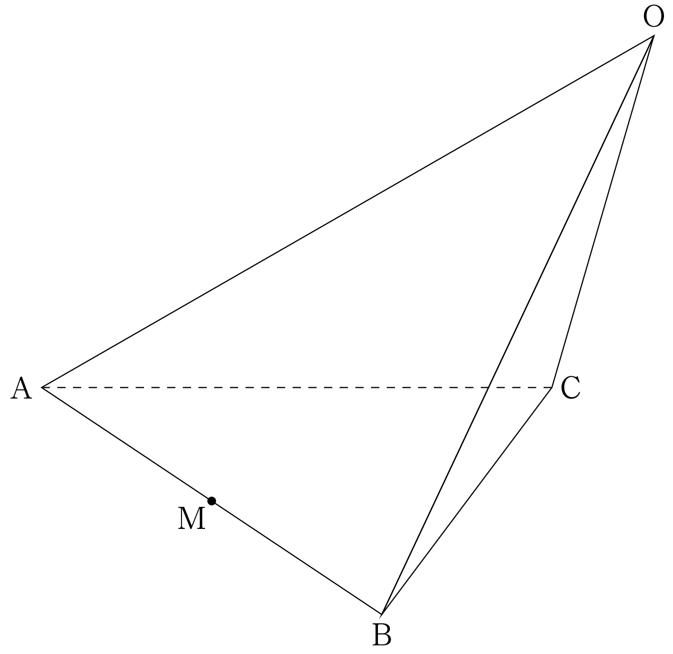
⑦ $p_1 = p_2 < p_3$　　⑧ $p_1 = p_3 < p_2$　　⑨ $p_2 = p_3 < p_1$

問３　$C = q^2 + 8tq + 16$（t は正の定数）とする。$30 \leqq p \leqq 35$ を満たすすべての p に対して，利益が 80 万円以上となるような t の値の範囲を求めよ。

第３問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。**問２（iii）** については，解答に至るまでの過程も記述せよ。

四面体 OABC は，$AB = BC = CA = OC = 4$ を満たす。また，辺 AB の中点を M とすると，$\cos\angle OCM = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。頂点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，点 H は直線 MC 上の点となる。



問１（i） 線分 OM の長さを求めよ。

（ii） 辺 OA の長さを求めよ。

問２（ｉ） 線分 OH の長さを求めよ。

（ii） 三角形 OBC の面積を求めよ。

（iii） 四面体 OABC に内接する球の半径を求めよ。

問３　四面体 OABC に外接する球の半径を求めよ。

第４問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。**問３（ii）**については解答に至るまでの過程も記述せよ。

問１　**（i）**　次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数として最も適切なものを答えよ。ただし，一般に n を正の整数とするとき，$n^0 = 1$ である。

13230 の正の約数の個数を求めたい。13230 を素因数分解すると

$$13230 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

であるから，13230 の正の約数は

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$$

（ただし，a，b，c，d は 0 以上の整数）

の形に表せる。ここで，

a のとり得る値は，1 と 0 の $1 + 1 = 2$ 通り，
b のとり得る値は，1，2，3 と 0 の $3 + 1 = 4$ 通り

である。c，d のとり得る値も同様に考えると，13230 の正の約数の個数は

$$(1+1)(3+1)\left(\boxed{\text{ア}}+1\right)\left(\boxed{\text{イ}}+1\right) = \boxed{\text{ウ}} \quad (\text{個})$$

となる。ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする。

（ii）　13230 の正の約数のうち，3 の倍数であるものの個数を求めよ。

問２　13230 の正の約数すべての積を P とする。$\dfrac{P}{3^k}$ が整数となるような正の整数 k のうち，値が最大のものを求めよ。

問３　次の文章を読み，下の問いに答えよ。

　m は正の整数で，$m \neq 105$ とする。13230 と m の最大公約数が 105 となるような正の整数 m を考える。このような m のうち，値が最小のものは $\boxed{\text{エ}}$ であり，次に値が小さいものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

（**i**）　上の文章中の $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数として最も適切なものを答えよ。

（**ii**）　13230 と，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数との最小公倍数を ℓ とする。
2 つの正の整数 A，B $(A \leqq B)$ の最大公約数を G，最小公倍数を L とするとき

$$G > 10,\ GL = \ell$$

を満たすような正の整数 A，B の組 $(A,\ B)$ の個数を求めよ。

問４　正の整数 N は 3 の倍数であるとする。$70N(70N+5)$ が 13230 の倍数となるような N のうち，値が小さい方から数えて 2 番目のものを求めよ。