令和５年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業

福岡県

高校生科学技術コンテスト ファーストステージ

数学

解答解説

受験番号	
氏　　名	
所属校名	

福岡県教育委員会

第１問

【出題のねらい】

数と式やデータの分析など，数学 I，数学 A の各分野の基本的な知識を問う。

……………………………………………………………

問１

(ｉ) 与えられた式を展開すると

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3$$
$$=x^3+y^3 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(ii) (ｉ)の結果より，

$$x^3+8y^3=x^3+(2y)^3$$
$$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(iii) (ｉ)の結果より，

$$40x^3-135y^3=5(8x^3-27y^3)$$
$$=5\{(2x)^3+(-3y)^3\}$$
$$=5(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$
$$\cdots\cdots \text{(答)}$$

問２

(ｉ) ① に $x=2$ を代入すると，$4-a+\dfrac{b}{2}=0$ より，$\dfrac{b}{2}=a-4$ となる。よって，

$$b=2a-8 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(ii) 方程式 $(x-2)^2=0$ は $x=2$ を重解にもち，これを展開すると $x^2-4x+4=0$ となる。この式を ① と比較して

$$\frac{a}{2}=4\,,\ \frac{b}{2}=4$$
$$a=b=8 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(iii) 与えられた条件から，$1-\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{2}=0$ となるので，$b=a+2$ である。(ｉ)の結果と合わせて，

$$2a-8=a+2$$
$$a=10\,,\ b=12 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

問３

(ｉ) 直線 AB の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x+1$ であり，直線 BC の方程式は $y=-2x+1$ である。よって，点 C の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ ……(答)

(ii) 点 D の座標は $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t+1\right)$ である。よって，直線 DE の方程式は $y-\left(\dfrac{1}{2}t+1\right)=-2(x-t)$ であるから，この式で $y=0$ とすると

$$\frac{1}{2}t+1=2x-2t$$
$$2x=\frac{5}{2}t+1$$
$$x=\frac{5}{4}t+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(iii) 三角形 ABC と三角形 ADE は相似な三角形であるが，その相似比が $1:4$ であればよい。このことから，$\mathrm{AC}:\mathrm{CE}=1:3$ であればよいことがわかる。$\mathrm{AC}=\dfrac{5}{2}$，$\mathrm{CE}=\dfrac{5}{4}t$ より，

$$\frac{5}{4}t=3\cdot\frac{5}{2}$$
$$t=6 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

問４

(ｉ) 並べてできる文字列の総数は

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180 \text{（通り）} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(ii) 2 つの K が隣り合う並べ方は K，K の 2 文字をひとかたまりと考えて，

$$\frac{5!}{2!}=5\cdot 4\cdot 3=60 \text{（通り）}$$

また，2 つの A が隣り合う並べ方も 60 通りである。次に KK，AA がそれぞれともに隣り合う並べ方は $4!=24$ 通りであるから，求める並べ方は

$$60+60-24=96 \text{（通り）} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(iii)　求める場合の数は，(**i**)で求めた文字列の総数から(**ii**)の場合の数を引いて，

$$180-96=84\text{（通り）}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

【別解】A，A，K，K の 4 文字を先に並べると，

A，A，K，K …①
A，K，A，K …②
A，K，K，A …③
K，K，A，A
K，A，K，A
K，A，A，K

の場合がある。

・① の場合は，2 つの A の間と，2 つの K の間に G，U が入る場合なので 2 通り。

・② の場合は，4 文字の間か両端の計 5 箇所のいずれかに入る場合である。G が入るのは 5 通りで，そのそれぞれの場合について U が入るのは，G と異なる場所に入るとき 4 通り，G と同じ場所に入るとき 2 通りである。よって，$5(4+2)=30$ 通り。

・③ の場合は，2 つの K の間に G が入るとき，U の入る場所は 6 通り。2 つの K の間に U が入るとき，G の入る場所は 6 通りある。これらのうち，重複するものは 2 組ある。よって，$6+6-2=10$ 通り。

　以上から，求める場合の数は

$$(2+30+10)\times 2=84\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

問５

(**i**)　ヒストグラムより，7 個　……（答）

(**ii**)　ヒストグラムより，$6+2=8$ 個　……（答）

(iii)　データは 30 個の値からなるため，第 3 四分位数は大きいほうから数えて 8 番目の値である。

　よって，第 3 四分位数は

180 g 以上 190 g 未満　……（答）

の階級に属している。

第２問

【出題のねらい】

　2 次方程式，2 次関数の最大・最小などの基本的な知識を問う。

……………………………………………………………

問１

　p，q は正の実数であるから，p，q のとり得る値の範囲は $0<p<40$，$0<q<40$ である。

(**i**)　$p=40-q$ より，売り上げは $pq=(40-q)q$ 万円となる。これが 300 万円となるから

$$(40-q)q=300$$
$$q^2-40q+300=0$$
$$(q-10)(q-30)=0$$
$$q=10,\ 30\ \text{（これらは共に適する。）}$$
$$(p,\ q)=(10,\ 30),\ (30,\ 10)$$
$$\cdots\cdots\text{（答）}\left(\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}}\right),\left(\boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エ}}\right)$$

(**ii**)　利益を $r(q)$ とすると，

$$\begin{aligned}r(q)&=pq-C\\&=(40-q)q-(q^2+8q+16)\\&=-2q^2+32q-16\end{aligned}$$

　$r(q)=80$ とおくと，

$$-2q^2+32q-16=80$$
$$q^2-16q+48=0$$
$$(q-4)(q-12)=0$$
$$q=4,\ 12\ \text{（これらは共に適する。）}$$
$$(p,\ q)=(28,\ 12),\ (36,\ 4)$$
$$\cdots\cdots\text{（答）}\left(\boxed{\text{オ}},\boxed{\text{カ}}\right),\left(\boxed{\text{キ}},\boxed{\text{ク}}\right)$$

(iii)　$r(q)$ の式を変形すると

$$\begin{aligned}r(q)&=-2q^2+32q-16\\&=-2(q-8)^2+112\end{aligned}$$

$0<q<40$ より，$r(q)$ の最大値は $r(8)=112$ であり，利益の最大値は，

$$112 \quad \cdots\cdots(\text{答}) \boxed{ケ}$$

万円であり，そのとき，

$$(p,\ q)=(32,\ 8)$$

$$\cdots\cdots(\text{答}) \left(\boxed{コ},\ \boxed{サ}\right)$$

問２

$p=p_1,\ p_2,\ p_3$ に対応する q の値を，それぞれ $q_1,\ q_2,\ q_3$ とする。qy 平面上で，放物線 $y=r(q)$ の軸を考えると，問１ (iii) のときの軸の方程式は $q=8$ である ($q_1=8$)。$C=q^2+8q+17$ のときは，$C=q^2+8q+16$ の場合と軸の方程式は変わらないので，利益が最大となるのは $q=8$ のときである ($q_2=8$)。

また，$C=q^2+12q+16$ のときは，$r(q)=-2q^2+28q-16$ より，軸の方程式は $q=7$ であり，$0<q<40$ のとき，利益が最大となるのは $q=7$ のときである ($q_3=7$)。

以上より，利益が最大となる q の値については

$$q_1=q_2>q_3$$

であるから，利益が最大となる p の値については

$$⑦ \quad p_1=p_2<p_3 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

問３

$30 \leqq p \leqq 35$ より，

$$\begin{aligned} 30 &\leqq 40-q \leqq 35 \\ -10 &\leqq -q \leqq -5 \\ 5 &\leqq q \leqq 10 \end{aligned}$$

である。

$C=q^2+8tq+16$ より，利益 $r(q)$ について，

$$\begin{aligned} r(q) &= -q^2+40q-(q^2+8tq+16) \\ &= -2q^2+(40-8t)q-16 \\ &= -2\{q^2-(20-4t)q\}-16 \\ &= -2\{q-(10-2t)\}^2 \\ &\qquad +2(2t-10)^2-16 \end{aligned}$$

qy 平面における，放物線 $y=r(q)$ の軸の方程式は $q=10-2t$ である。

・$10-2t \leqq \dfrac{15}{2}$ $\left(\text{すなわち } t \geqq \dfrac{5}{4}\right)$ のとき，最小値は

$$\begin{aligned} r(10) &= -2\cdot 10^2+10(40-8t)-16 \\ &= 200-80t-16 \\ &= -80t+184 \end{aligned}$$

であるから，$-80t+184 \geqq 80$ とおくと

$$\begin{aligned} -80t &\geqq -104 \\ t &\leqq \frac{13}{10} \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{5}{4} \leqq t \leqq \dfrac{13}{10}$ $\cdots\cdots$ ①

・$\dfrac{15}{2}<10-2t$ $\left(\text{すなわち } 0<t<\dfrac{5}{4}\right)$ のとき，最小値は

$$\begin{aligned} r(5) &= -2\cdot 5^2+5(40-8t)-16 \\ &= 150-40t-16 \\ &= -40t+134 \end{aligned}$$

であるから，$-40t+134 \geqq 80$ とおくと，

$$\begin{aligned} -40t &\geqq -54 \\ t &\leqq \frac{27}{20} \end{aligned}$$

よって，$0<t<\dfrac{5}{4}$ $\cdots\cdots$ ②

①，② より，求める t の値の範囲は

$$0<t \leqq \frac{13}{10} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

第３問

【出題のねらい】

正弦定理，余弦定理などを用いて，線分の長さや，面積・体積などを問う。

……………………………………………………

問１

（**i**） $\mathrm{CM}=2\sqrt{3}$ であるから，三角形 OMC に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{OM}^2&=\left(2\sqrt{3}\right)^2+4^2\\&\quad-2\cdot2\sqrt{3}\cdot4\cdot\cos\angle\mathrm{OCM}\\&=12+16+16\\&=44\end{aligned}$$

$$\mathrm{OM}=2\sqrt{11}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

（**ii**） $\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}$ より三角形 OAB は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ の二等辺三角形であるから，三角形 OAM に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}&=\sqrt{\left(2\sqrt{11}\right)^2+2^2}\\&=\sqrt{48}\\&=4\sqrt{3}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

問２

（**i**）

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OCH}&=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{OCM})\\&=-\cos\angle\mathrm{OCM}=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\sin\angle\mathrm{OCH}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=\mathrm{OC}\cdot\sin\angle\mathrm{OCH}\\&=4\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\\&=\frac{4\sqrt{6}}{3}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

（**ii**） $\mathrm{OC}=\mathrm{CB}=4$，$\mathrm{OB}=4\sqrt{3}$ であるから，三角形 OBC に余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{OCB}=\frac{4^2+4^2-(4\sqrt{3})^2}{2\cdot4\cdot4}=-\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{OCB}=120^\circ$ である。ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle\,\mathrm{OBC}&=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120^\circ\\&=4\sqrt{3}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

（**iii**） 四面体 OABC の体積を V とする。

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\,\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}\\&=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}\\&=\frac{16\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

内接球の中心を I とすると，V は 4 つの四面体 IOAB，IOBC，IOAC，IABC の体積の和に等しい。

$$\triangle\mathrm{OAB}=4\sqrt{11},$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{ABC}=4\sqrt{3}$$

であるから，内接球の半径を r とすると，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{11}\cdot r+3\times\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{3}\cdot r\\&=\frac{1}{3}\cdot4(\sqrt{11}+3\sqrt{3})r\end{aligned}$$

よって

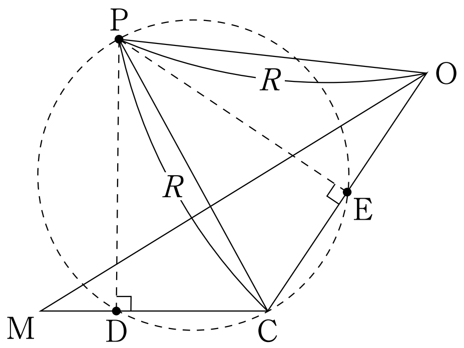
$$\begin{aligned}\frac{16\sqrt{2}}{3}&=\frac{1}{3}\cdot4(\sqrt{11}+3\sqrt{3})r\\4\sqrt{2}&=\left(\sqrt{11}+3\sqrt{3}\right)r\\r&=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{11})}{27-11}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)}{4}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\\&\left(=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{22}}{4}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\right)\end{aligned}$$

問３

四面体 OABC に外接する球の中心を P とおく。P から平面 ABC に垂線 PD を下ろすと，D は三角形 ABC の外心である。さらに，三角形 ABC は正三角形であるから，点 D は三角形 ABC の重心でもあるため，$\mathrm{CD}:\mathrm{DM}=2:1$ である。したがって，$\mathrm{CD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ である。

また，求める球の半径を R とおくと，$R=\mathrm{OP}=\mathrm{PC}$ であるから，三角形 OPC は二等辺三角形となる。

よって，点 P から辺 OC に垂線 PE を下ろすと，点 E は辺 OC の中点であり，$\mathrm{CE}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OC}=2$ である。



さらに，四角形 PDCE は円に内接し，求める半径 R は四角形 PDCE の外接円の直径である。

三角形 CDE に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}^2 &= \mathrm{CD}^2+\mathrm{CE}^2\\ &\quad -2\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}\cdot\cos\angle\mathrm{OCM}\\ &=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+2^2\\ &\quad -2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &=\frac{16}{3}+4+\frac{16}{3}\\ &=\frac{32+12}{3}=\frac{44}{3}\\ \mathrm{DE}&=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

三角形 CDE に正弦定理を用いて

$$\begin{aligned}R&=(\text{三角形 CDE の外接円の直径})\\ &=\frac{\mathrm{DE}}{\sin\angle\mathrm{OCM}}\\ &=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{6}}\\ &=\sqrt{22}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

第４問

【出題のねらい】

比較的値が大きな正の整数を題材として，約数や，最大公約数・最小公倍数など，整数の基本的知識を問う。

…………………………………………………………

問１

(**i**) c のとり得る値は，1 と 0 の 2 通り。d のとり得る値は，1，2 と 0 の 3 通りであるから，

$$(1+1)(3+1)\left(\boxed{1}+1\right)\left(\boxed{2}+1\right)$$
$$=\boxed{48}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\boxed{ア},\boxed{イ},\boxed{ウ}$$

(**ii**) 13230 の正の約数のうち，3 の倍数は，

$$2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$$
$$(0\leqq a\leqq1,\ 1\leqq b\leqq3,\ 0\leqq c\leqq1,\ 0\leqq d\leqq2)$$

であるから，その個数は，

$$2\cdot3\cdot2\cdot3=36\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

問２

13230 のすべての正の約数に含まれる素因数 3 の総数を求める。13230 の正の約数のうち，3 の倍数の個数は **問 1(ii)** より 36 個である。また，同様に 9 の倍数は $2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$

$$(0\leqq a\leqq1,\ 2\leqq b\leqq3,\ 0\leqq c\leqq1,\ 0\leqq d\leqq2)$$

であり，その個数は $2\cdot2\cdot2\cdot3=24$ 個。

27 の倍数は $2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$

$$(0\leqq a\leqq1,\ b=3,\ 0\leqq c\leqq1,\ 0\leqq d\leqq2)$$

であり，その個数は $2\cdot1\cdot2\cdot3=12$ 個。

よって，13230 のすべての正の約数に含まれる素因数 3 の総数は $36+24+12=72$ 個であるから，求める k の値は

$$72\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

【別解】 13230 の正の約数すべての積 P は

$$P=1\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot6615\cdot13230$$

であり，$1 \cdot 13230$ や，$2 \cdot 6615$ などのように，積が 13230 となる 2 数を組で考えると，**問１**の結果から P は $\dfrac{48}{2}=24$(個) の 13230 の積に一致する。よって，

$$
\begin{aligned}
P &= 13230^{24} = (2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2)^{24} \\
&= 2^{24} \cdot 3^{72} \cdot 5^{24} \cdot 7^{48}
\end{aligned}
$$

であり，求める k の値は 72 である。

（別解終わり）

問３

（**i**）　$13230(=2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2)$ との最大公約数が $105(=3 \cdot 5 \cdot 7)$ になるような正の整数 n は

$$n = 3 \cdot 5^t \cdot 7 \cdot p$$

（t は正の整数，p は 2, 3, 5, 7 と互いに素）

と表される。

以上から，105 ($t=p=1$ の場合) を除き，n の値が最小となるのは $t=2$，$p=1$ のときであり，2 番目に n の値が小さくなるのは $t=1$，$p=11$ のときである。

$105 \times 5 = 525$　……（答）$\boxed{\text{エ}}$

$105 \times 11 = 1155$　……（答）$\boxed{\text{オ}}$

（**ii**）　$13230 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ と，
$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ の最小公倍数は，
$\ell = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ である。

A，B の最大公約数が G であるから，

$$A = A_1G,\ B = B_1G$$

（A_1 と B_1 は互いに素な整数）

とおける。$L = A_1B_1G$ であるから，$GL = \ell$ より，$A_1B_1G^2 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ となる。

よって，G^2 は平方数（整数を 2 乗した数）で $G > 10$ であるから，$G^2 = 3^2 \cdot 7^2 = 21^2$ より，$G = 21$，$A_1B_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ を得る。

求める正の整数 A，B の組 (A，B) の個数は，上記を満たす互いに素な整数 A_1，B_1 ($A_1 \leqq B_1$) の組 (A_1，B_1) の個数に一致する。

ここで，$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ の正の約数の個数は $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ であり，$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ は平方数ではない。

よって，$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ を 2 つの正の整数 A_1，B_1 の積で表したとき $A_1 = B_1$ となるものはなく，$A_1 < B_1$ を満たす組，および $A_1 > B_1$ を満たす組の個数はともに $\dfrac{16}{2} = 8$ であり，どの場合も 2 つの整数 A_1，B_1 は互いに素である。

以上より，求める組の個数は 8　……（答）

問４

$70N(70N+5)$ が $13230(=2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2)$ の倍数であるためには，

「$N(70N+5)$ が $3^3 \cdot 7$ の倍数」　……（$*$）

であればよいことに注意する。

$70N+5$ は 3 の倍数ではないので，N は 3^3 の倍数である。

また，$70N+5$ は 7 の倍数ではないので，N は 7 の倍数である。

よって，N は 3^3 の倍数かつ 7 の倍数であるから，条件を満たす N のうち，2 番目に値が小さなものは，

$3^3 \cdot 7 \cdot 2 = 378$　……（答）