令和４年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業

福岡県
高校生科学技術コンテスト
ファーストステージ

数学

注意事項

１　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
２　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れなどに気付いた場合は，挙手をして監督者に知らせなさい。ただし，問題内容にかかわる質問は，受け付けません。
３　解答用紙には，解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って正しく記入しなさい。
　(1) 受験番号欄…受験票に記入されている受験番号を記入しなさい。
　(2) 氏　名　欄…氏名を楷書で記入しなさい。
　(3) 所属校名欄…受験票に記入されている所属校名を記入しなさい。
４　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

受験番号	
氏　　名	
所属校名	

福岡県教育委員会

第１問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。

問１　$a=\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，$b=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ とする。

（ⅰ）a の分母を有理化せよ。

（ⅱ）$a+b$，ab の値をそれぞれ求めよ。

（ⅲ）a^2+b^2 の値を求めよ。

（ⅳ）a^5+b^5 の値を求めよ。

問２　連立不等式

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{9}x+5 \leqq \dfrac{3(x+1)}{2} & \cdots\cdots ① \\ |x-2| < a \end{cases}$$

について考える。ここで a は正の定数である。

（ⅰ）不等式①を解け。

（ⅱ）この連立不等式が解をもつような a の値の範囲を求めよ。

問３　ω を x の方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つとする。

（ⅰ）ω^{2022} の値を求めよ。

（ⅱ）$\omega^2+\omega$ の値を求めよ。

（ⅲ）$\omega^{1000}+\omega^{500}+1$ の値を求めよ。

（ⅳ）a，b，c を実数の定数とする。x の３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $\dfrac{1}{\omega}$ を解にもつとき，この方程式の実数解を a を用いて表せ。

問４　A，B，C の３人でじゃんけんをする。

（ⅰ）１回のじゃんけんで A がただ１人の勝者となる確率を求めよ。

（ⅱ）１回のじゃんけんであいこになる確率を求めよ。

（ⅲ）１回のじゃんけんであいこ，または勝者が２人となった場合は，敗者を除いた３人，または２人でもう１度じゃんけんをすることにした。２回目のじゃんけんで A がただ１人の勝者となったとき，１回目のじゃんけんの勝者が２人である条件付き確率を求めよ。

問5　3個の実数値x_1，x_2，x_3からなるデータを表す変量をxとする。また，実数の定数aを用いて3個の値y_1，y_2，y_3を次のように定める。

$$y_1=x_1+a,\ y_2=x_2+a,\ y_3=x_3+2a$$

3個の値y_1，y_2，y_3からなるデータを表す変量をyとし，x，yの平均値をそれぞれ$\overline{x}$，$\overline{y}$とおく。

（ⅰ）$\overline{x}=\dfrac{2a}{3}$とする。$\overline{y}$を$a$を用いて表せ。

（ⅱ）$\overline{x}=\dfrac{2a}{3}$かつ，$x_3=-a$とする。$x$，$y$の分散をそれぞれ${s_x}^2$，${s_y}^2$とすると，実数$A$を用いて

$${s_y}^2={s_x}^2+A$$

となる。このとき，Aをaを用いて表せ。

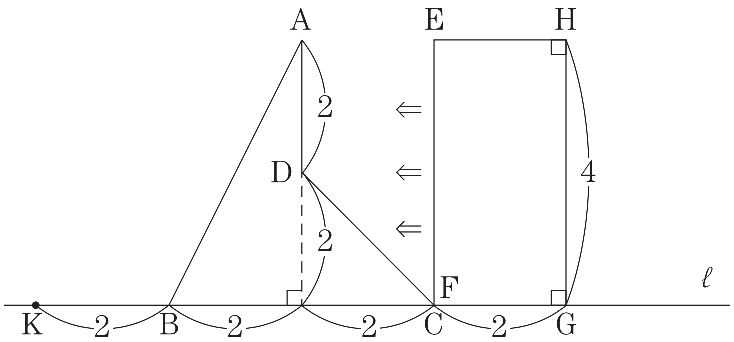
第２問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。

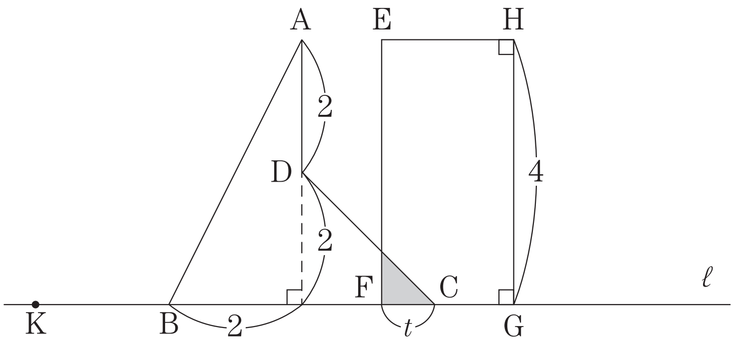
下の図のように，四角形 ABCD（直角をはさむ２辺の長さが２，４の直角三角形と２辺の長さが２の直角二等辺三角形を組み合わせた図形）と長方形 EFGH（EF の長さが４，FG の長さが２）があり，点 B，C，F，G が直線 ℓ 上にあるように置かれている。

四角形 ABCD は固定されており，長方形 EFGH を図の矢印の方向に点 F が点 C と一致する状態から，点 F が図の点 K に一致するまで動かす。

このとき，２点 C，F 間の距離を t（$0 \leqq t \leqq 6$）とし，四角形 ABCD と長方形 EFGH の共通部分（重なる部分）の面積を S とする。



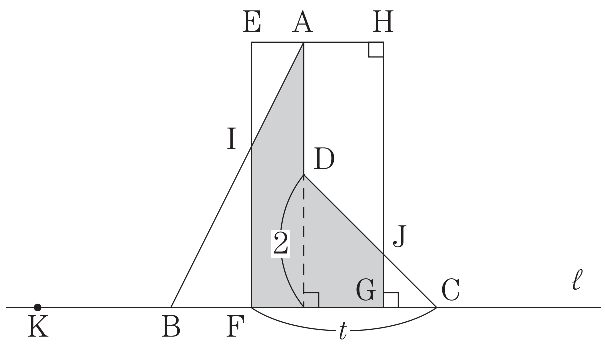
問１　$0 \leqq t \leqq 2$ とする。



（ⅰ）S を t を用いて表せ。

（ⅱ）$S=1$ となるような t の値を求めよ。

問 2　$2 < t < 4$ とする。



次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数として最も適切なものを答えよ。

線分 AB，EF の交点を I，線分 CD，HG の交点を J とする。線分 IF，JG の長さをそれぞれ t を用いて表すと

$$\mathrm{IF} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t,\quad \mathrm{JG} = t - \boxed{\text{ウ}}$$

である。

また，S を t を用いて表すと

$$S = -\boxed{\text{エ}}\, t^2 + \boxed{\text{オ}}\, t - \boxed{\text{カ}}$$

である。（これは $t=2$，4 のときも成り立つ。）

問 3　$4 \leqq t \leqq 6$ のとき，S を t を用いて表せ。

問 4　（ⅰ）$0 \leqq t \leqq 6$ における t の関数 S のグラフをかけ。

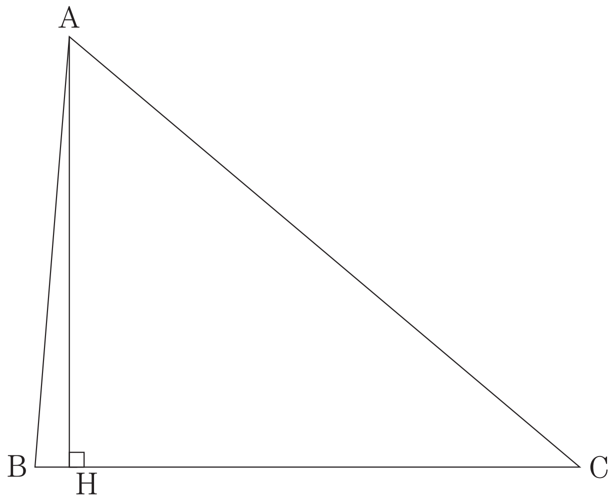
（ⅱ）$0 \leqq t \leqq 6$ における S の最大値と，それを与える t の値を求めよ。

問 5　$0 \leqq t \leqq 6$ のとき，$1 \leqq S \leqq \dfrac{9}{2}$ となるような t の値の範囲を求めよ。

第3問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。**問3**（ⅱ）については，解答に至るまでの過程も記述せよ。

3辺の長さが AB＝4，BC＝5，CA＝6 の鋭角三角形 ABC において点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。



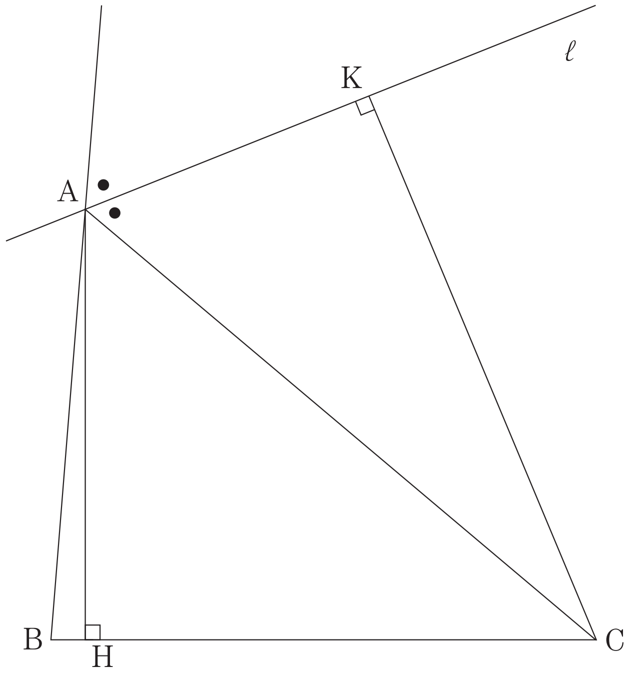
問1　（ⅰ）　線分 BH の長さを求めよ。

（ⅱ）　三角形 ABC の面積 S を求めよ。

問2　（ⅰ）　三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

（ⅱ）　三角形 ABC の内接円の中心を I とし，$\angle \mathrm{BAI} = \theta$ とおくとき，$\tan\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。

問3　$\angle$BAC の外角の二等分線を ℓ とし，点 C から ℓ に垂線 CK を下ろす。



（ i ）　線分 CK の長さを求めよ。

（ ii ）　2 直線 AC，HK の交点を E とするとき，$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}$ の値を求めよ。

第４問

以下の各問いに答えよ。答えはすべて，解答用紙の指定された箇所に記入すること。**問４**（ⅲ）については解答に至るまでの過程も記述せよ。

問１　次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまる数として最も適切なものを答えよ。ただし，同じ解答記号の空欄には同じものが入るものとする。

方程式

$$xy=3x+3y \cdots\cdots (*)$$

を満たす正の整数の組（x，y）を求めたい。

（＊）より $xy-3x-3y=0$ であるから

$$(x-3)(y-3)=\boxed{\text{ア}}$$

と変形できる。

x，y は正の整数であるから

$$x-3 \geqq -2,\ y-3 \geqq -2$$

であることに注意して，$\boxed{\text{ア}}$ の約数を考えると

$$(x-3,\ y-3)$$
$$=(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}),\ (\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}),\ (\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}})$$

となる。ただし，$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

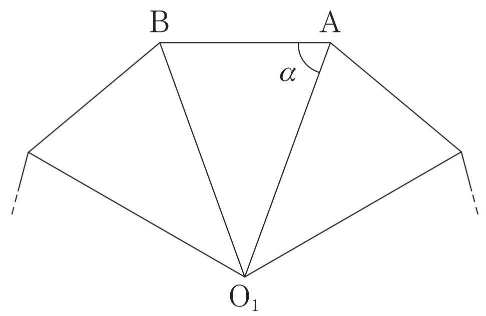
これより，求める整数の組は

$$(x,\ y)=(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}}),\ (\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}),\ (\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}})$$

である。ただし，$\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{シ}}$ とする。

914592_福岡_数学honbun_cc19.indd　8　　2022/06/06　15:17

問 2　下の図は正 n 角形（n は 3 以上の整数）の外接円の中心を O_1 とし，隣り合う 2 頂点を A，B としたものである。



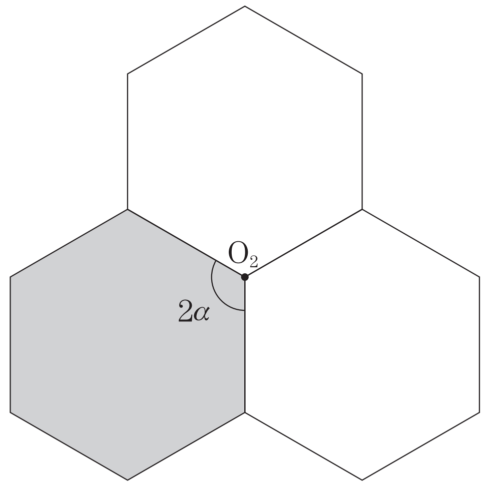
$\angle O_1AB=\alpha$ とするときの α を度数法の °を用いて表すと

$$\alpha=\left\{\left(\boxed{\text{セ}}-\frac{\boxed{\text{ソ}}}{n}\right)\times 90\right\}^{\circ}$$

である。$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまる数として最も適するものを答えよ。

問 3　平面上のある点 O_2 に正 n 角形（n は 3 以上の整数）が k 個集まり，すきまも重なりもない場合を考える。例えば $n=6$ のとき $2\alpha=120°$，$k=3$ であり，下の図のようになる。

$2\alpha\times k=360°$ であることに注意して，$(n,\ k)=(6,\ 3)$ 以外の正の整数の組 $(n,\ k)$ をすべて求めよ。



問 4　正 ℓ 角形，正 m 角形，正 n 角形（ℓ，m，n は 3 以上の整数で，$\ell \leqq m \leqq n$）の 3 つの正多角形を考える。これらの頂点がすきまも重なりもなく 1 点に集まっている場合を考える。

（ i ）$\dfrac{1}{\ell}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ の値を求めよ。

（ ii ）$\ell=4$ のとき，正の整数の組（m，n）をすべて求めよ。

（ iii ）正の整数の組（ℓ，m，n）の個数を求めよ。