

令和4年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業



高校生科学技術コンテスト
ファーストステージ

数学

解答解説

受験番号	
氏名	
所属校名	

福岡県教育委員会

第1問

【出題のねらい】

数と式やデータの分析など、数学I、数学Aの分野をはじめ、数学IIの範囲の基本的な知識を問う。

問1

(i)

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} \\ &= \sqrt{7}-\sqrt{5} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(ii) (i)の結果より、

$$\begin{aligned} a+b &= (\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}+\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{7} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2 \\ &= 7-5 \\ &= 2 \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(iii) $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2 \\ &= 28 - 4 \\ &= 24 \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(iv) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{7})^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{7} \\ &= 56\sqrt{7} - 12\sqrt{7} \\ &= 44\sqrt{7} \end{aligned}$$

より、(iii)の結果と合わせて、

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3) = 24 \cdot 44\sqrt{7}$$

となる。

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= (a^2+b^2)(a^3+b^3) - a^2b^3 - a^3b^2 \\ &= (a^2+b^2)(a^3+b^3) - a^2b^2(a+b) \\ &= 24 \cdot 44\sqrt{7} - 2^2 \cdot 2\sqrt{7} \\ &= 1056\sqrt{7} - 8\sqrt{7} \\ &= 1048\sqrt{7} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

問2

(i) ①を整理すると

$$-2x+90 \leq 27(x+1)$$

$$-29x \leq 27-90$$

$$-29x \leq -63$$

$$x \geq \frac{63}{29} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) もう1つの不等式を整理すると

$$-a < x-2 < a$$

$$-a+2 < x < a+2$$

となるので、与えられた連立不等式が解をもつ

のは $\frac{63}{29} < a+2$ となるときである。よって

$$a > \frac{63}{29} - 2$$

$$a > \frac{63-58}{29}$$

$$a > \frac{5}{29} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

問3

(i) $\omega^3=1$ であるから

$$\omega^{2022} = (\omega^3)^{674}$$

$$= 1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) $\omega^3-1=0$ の左辺を因数分解して

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1) = 0$$

$$\omega^2+\omega+1=0 \quad (\because \omega \neq 1)$$

$$\omega^2+\omega = -1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(iii) $\omega^{1000} + \omega^{500} + 1$

$$= (\omega^3)^{333} \cdot \omega + (\omega^3)^{166} \cdot \omega^2 + 1$$

$$= \omega + \omega^2 + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(注) ω の共役複素数を $\bar{\omega}$ と表す

(iv) $\omega^3=1$ であるから、 $\left(\frac{1}{\omega}\right)^3=1$ 、 $(\omega^2)^3=1$

や、両辺の共役な複素数をとって、 $(\bar{\omega})^3=1$ も成立する。3次方程式 $x^3=1$ の解は高々3つしかなく、そのうちの2つは $x=1$ と $x=\omega$ である。

これらのことから、 $\omega^2 = \bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$ であることに注意する。与えられた式に $x = \frac{1}{\omega}$ を代入して

$$\frac{1}{\omega^3} + \frac{a}{\omega^2} + \frac{b}{\omega} + c = 0$$

$$1 + a\omega + b\omega^2 + c = 0$$

$$(a-b)\omega + 1 - b + c = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

ω は虚数であり、 $a-b$ 、 $1-b+c$ はともに実数であるから、

$$a-b=0 \quad 1-b+c=0$$

これより、 $a=b$ 、 $c=a-1$

よって、与えられた方程式は次のように変形できる。

$$x^3 + ax^2 + ax + a - 1 = 0$$

$$a(x^2 + x + 1) + (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x+a-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

これより、求める実数解は

$$x = -a + 1 \quad \dots\dots\text{(答)}$$

【別解】

係数がすべて実数である3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が $\frac{1}{\omega} = \omega^2$ を解にもつから、

$$\bar{\omega}^2 = \bar{\omega} = \omega \text{ を解にもつ。}$$

よって解と係数の関係から

$$a + \omega^2 + \omega = -a$$

$$a - 1 = -a$$

したがって

$$a = -a + 1 \quad \dots\dots\text{(答)} \quad (\text{【別解】終わり})$$

(参考) 3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

の3つの解を α 、 β 、 γ とすると

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

問4

(i) 3人の手の出し方は 3^3 通りであり、勝者Aの手の出し方は3通りである。よって、

$$\text{求める確率は } \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

(ii) 勝者が1人となる確率は(i)より

$$\frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3} \text{ であり、勝者が2人となる確率も同様に } \frac{1}{3} \text{ である。よって、求める確率は}$$

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

(iii) 次のように事象 E 、 F を定める。

E : 2回目のじゃんけんの勝者はAただ1人、

F : 1回目のじゃんけんの勝者が2人

このとき、求めるのは $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$ である。

1回目であいこで、2回目でAがただ1人の勝者となる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$ である。また、1回目のじゃんけんでBまたはCのいずれか一方が負ける確率は $\frac{{}_2C_1 \cdot 3}{3^3}$ であるから1

回目のじゃんけんで勝者が2人であり、2回目でAがただ1人の勝者となる確率は

$$\frac{{}_2C_1 \cdot 3}{3^3} \cdot \frac{3}{3^2} = \frac{2}{27}$$

であるから

$$P(E) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}$$

$$P(E \cap F) = \frac{2}{27}$$

以上のことから

$$P_E(F) = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

問5

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\
 &= \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + (x_3 + 2a)}{3} \\
 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{4a}{3} \\
 &= \bar{x} + \frac{4a}{3} \\
 &= \frac{2a}{3} + \frac{4a}{3} \\
 &= 2a \quad \dots\dots \text{(答)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad s_y^2 &= \frac{1}{3} \{ (y_1 - 2a)^2 + (y_2 - 2a)^2 + (y_3 - 2a)^2 \} \\
 &= \frac{1}{3} \{ (x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + x_3^2 \} \\
 &= \frac{1}{3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_1 - 2ax_2 + 2a^2) \\
 &= \bar{x}^2 - \frac{2}{3} a (x_1 + x_2 - a) \\
 &= \{ s_x^2 + (\bar{x})^2 \} - \frac{2}{3} a \cdot 3\bar{x} \\
 &= s_x^2 + \left(\frac{2}{3} a \right)^2 - \frac{2}{3} a \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} a \\
 &= s_x^2 - \frac{8}{9} a^2
 \end{aligned}$$

よって,

$$A = -\frac{8}{9} a^2 \quad \dots\dots \text{(答)}$$

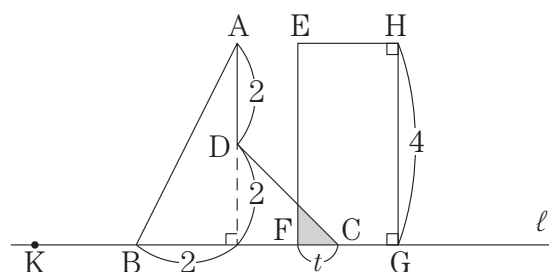
第2問

【出題のねらい】

2次方程式, 2次関数の最大・最小などの基本的な知識を問う。

問1

(i) $0 < t \leq 2$ のとき, 共通部分は図の直角二等辺三角形である。



その面積 S は $S = \frac{1}{2} t^2$ である。これは $t = 0$ のときも成り立つから, $0 \leq t \leq 2$ のとき,

$$S = \frac{1}{2} t^2 \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(ii) $S = 1$ より, $\frac{1}{2} t^2 = 1$ となり, $t^2 = 2$ を得る。 $0 \leq t \leq 2$ であるから, $t = \sqrt{2}$ $\dots\dots \text{(答)}$

問2

$2 < t < 4$ のとき, 共通部分は問の図の六角形 AIFGJD である。このとき

$$BF = BC - FC = 4 - t$$

$$GC = FC - FG = t - 2$$

$BF : IF = 1 : 2$ であるから

$$\begin{aligned}
 IF &= 2BF \\
 &= 8 - 2t
 \end{aligned}$$

$$\dots\dots \text{(答)} \quad \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}}$$

三角形 JGC は直角二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned}
 JG &= GC \\
 &= t - 2 \quad \dots\dots \text{(答)} \quad \boxed{\text{ウ}}
 \end{aligned}$$

また,

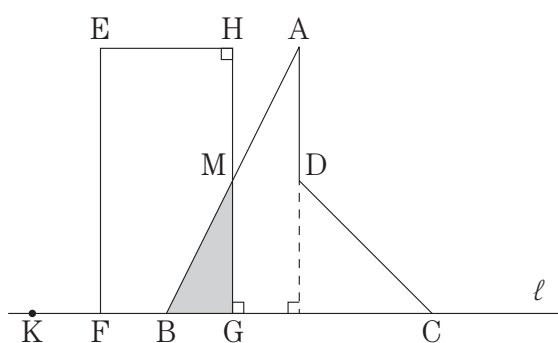
$$S = (\text{四角形 ABCD}) - \triangle IBF - \triangle JGC$$

$$\begin{aligned}
&= 6 - \frac{1}{2}(4-t)(8-2t) - \frac{1}{2}(t-2)^2 \\
&= 6 - (16-8t+t^2) - \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2\right) \\
&= -\frac{3}{2}t^2 + 10t - 12
\end{aligned}$$

……(答) 工, オ, カ

これは、 $t=2, 4$ のときも成り立つ。

問3



$4 \leq t < 6$ のとき、辺 AB と、線分 HG の交点を M とする。共通部分は図の三角形 MBG である。

$$\begin{aligned}
BG &= FG - FB \\
&= FG - (FC - BC) \\
&= 2 - (t - 4) \\
&= 6 - t
\end{aligned}$$

より、 $MG = 2BG = 12 - 2t$ であるから

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(6-t)(12-2t) \\
&= (6-t)^2
\end{aligned}$$

これは、 $t=6$ のときも成り立つから、 $4 \leq t \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned}
S &= (t-6)^2 \quad \text{……(答)} \\
&\text{(または、 } S = t^2 - 12t + 36)
\end{aligned}$$

問4

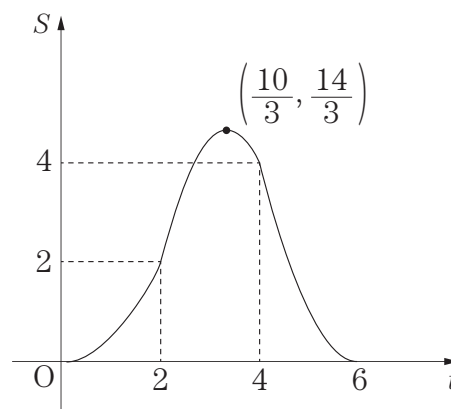
(i) $2 \leq t \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{3}{2}t^2 + 10t - 12 \\
&= -\frac{3}{2}\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

であるから

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & (0 \leq t \leq 2) \\ -\frac{3}{2}\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{14}{3} & (2 \leq t \leq 4) \\ (t-6)^2 & (4 \leq t \leq 6) \end{cases}$$

t の関数 S のグラフは次のようになる。



(ii) グラフより $0 \leq t \leq 6$ における S の最大値は

$$t = \frac{10}{3} \text{ のとき, } \frac{14}{3} \quad \text{……(答)}$$

問5

$2 \leq t \leq 4$ のとき、 $S = \frac{9}{2}$ とおくと

$$-\frac{3}{2}t^2 + 10t - 12 = \frac{9}{2}$$

$$3t^2 - 20t + 33 = 0$$

$$(t-3)(3t-11) = 0$$

$$t = 3, \frac{11}{3}$$

また、問1 より $0 \leq t \leq 2$ のとき $S=1$ とおくと $t = \sqrt{2}$ 、 $4 \leq t \leq 6$ のとき、 $S=1$ とおくと

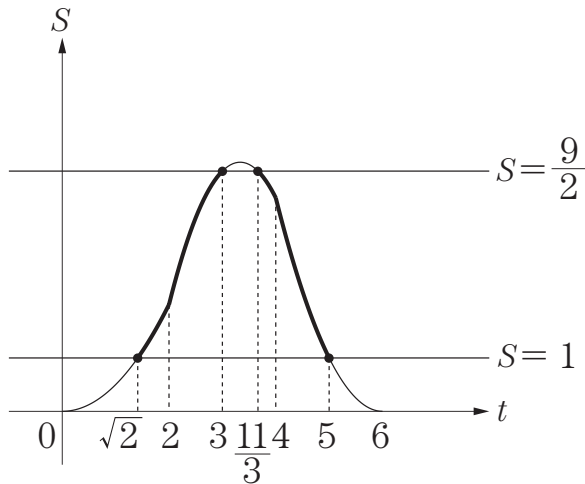
$$(t-6)^2=1$$

$$t-6=\pm 1$$

$$t=5 \quad (\because 4 \leq t \leq 6)$$

求める t の値の範囲は

$$\sqrt{2} \leq t \leq 3, \quad \frac{11}{3} \leq t \leq 5 \quad \dots\dots(\text{答})$$



第3問

【出題のねらい】

正弦定理などを用いて、線分の長さや、面積などを問う。一部に平面図形の性質を用いるものも含む。

問1

(i) $BH=x$ とおくと、 $HC=5-x$ となる。

三角形 ABH で三平方の定理より

$$AH^2=4^2-x^2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

三角形 AHC で同様にして

$$AH^2=6^2-(5-x)^2 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

①, ②より

$$4^2-x^2=6^2-(5-x)^2$$

$$16-x^2=36-(25-10x+x^2)$$

$$5=10x$$

$$x=\frac{1}{2}$$

よって、 $BH=\frac{1}{2}$ $\dots\dots(\text{答})$

(ii) $x=\frac{1}{2}$ を①に代入して

$$AH^2=4^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{63}{4}$$

$$AH=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$S=\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

$$=\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$=\frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

【別解】(i), (ii)

三角形 ABC で余弦定理より

$$6^2=4^2+5^2-2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \angle ABC$$

$$\cos \angle ABC=\frac{1}{8}$$

三角形 ABH で

$$BH = AB \cdot \cos \angle ABC = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

また、 $\angle ABC$ は鋭角であるから

$$\sin \angle ABC > 0$$

よって、

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

したがって、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(【別解】終わり)

問 2

$$(i) S = \frac{r}{2} (AB + BC + CA)$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{r}{2} (4 + 5 + 6)$$

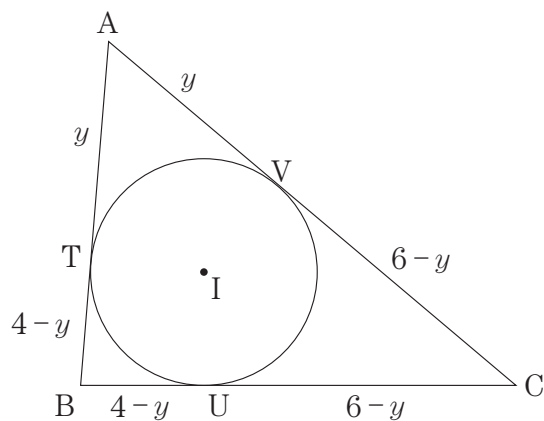
$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{15r}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) 三角形 ABC の 3 辺 AB, BC, CA と内接円との接点をそれぞれ T, U, V とすると、円外の 1 点から円に引いた 2 本の接線の長さまでの長さは等しいから

$$AT = AV, BU = BT, CV = CU$$

よって、 $y = AT = AV$ とおくと



図より

$$BU = BT = 4 - y$$

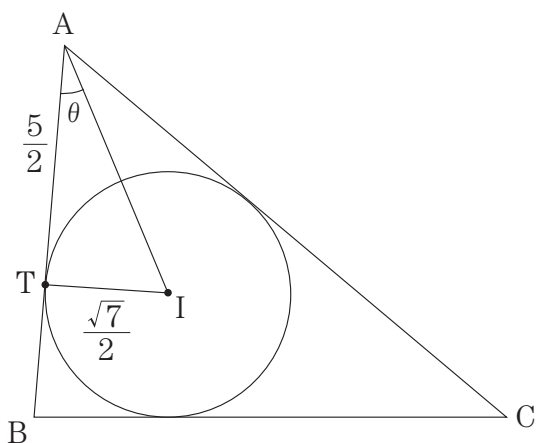
$$CU = CV = 6 - y$$

であるから

$$BC = BU + CU$$

$$5 = (4 - y) + (6 - y)$$

$$y = \frac{5}{2}$$



円の接線と半径の関係から $AB \perp IT$ である。

このとき

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{IT}{AT} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{5} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

また、三平方の定理から

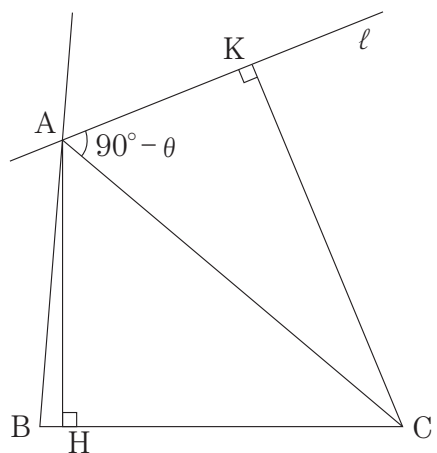
$$\begin{aligned} AI^2 &= AT^2 + IT^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 8 \end{aligned}$$

であるから、 $AI = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AT}{AI} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

問3

(i) AIは∠BACの二等分線であるから、問2のθを用いると∠BAC=2θとなる。



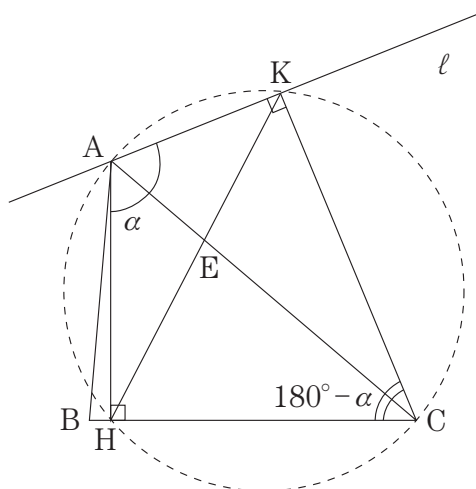
さらに、

$$\begin{aligned}\angle CAK &= \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta\end{aligned}$$

三角形CAKで

$$\begin{aligned}CK &= CA \cdot \sin(90^\circ - \theta) \\ &= 6\cos\theta \\ &= 6 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{15\sqrt{2}}{4} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

(ii) ∠AHC+∠AKC=180°より四角形AHCKは円に内接する。



よって、∠KAH=αとおくと
∠KCH=180°-αとなるので、

$$\begin{aligned}\frac{AE}{EC} &= \frac{\triangle AHK}{\triangle CHK} \\ &= \frac{\frac{1}{2} AH \cdot AK \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} CH \cdot CK \cdot \sin(180^\circ - \alpha)} \\ &= \frac{AH \cdot AK}{CH \cdot CK} \quad \dots\dots\textcircled{3}\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$CH = BC - BH = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

また、

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \tan\theta \cos\theta \\ &= \frac{\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{14}}{8}\end{aligned}$$

であるから、三角形CAKで

$$\begin{aligned}AK &= CA \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= 6\sin\theta \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{14}}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{4}\end{aligned}$$

よって、③より

$$\begin{aligned}\frac{AE}{EC} &= \frac{\frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{14}}{4}}{\frac{9}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}}{15\sqrt{2}} \\ &= \frac{7}{15} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

第4問

【出題のねらい】

正多角形の内角の大きさを題材として、有理数を単位分数の和で表す形式で、不定方程式の整数解を問う。

問1

(*) より $xy - 3x - 3y = 0$ であるから、両辺に x, y の係数の積 9 を加えて

$$(x-3)(y-3) = 9 \quad \dots\dots(\text{答}) \quad \boxed{\text{ア}}$$

と変形できる。

x, y は正の整数であるから

$$x-3 \geq -2, \quad y-3 \geq -2$$

であることに注意して 9 の約数を考えると

$$(x-3, y-3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$$

$\dots\dots(\text{答})$

$$\left(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}} \right), \left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}} \right), \left(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}} \right)$$

であるから求める整数の組 (x, y) は

$$(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$$

$\dots\dots(\text{答})$

$$\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}} \right), \left(\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}} \right), \left(\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}} \right)$$

問2

$$\angle AO_1B = \frac{360^\circ}{n} \text{ であるから}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AO_1B)$$

$$= \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right)$$

$$= 90^\circ \left(1 - \frac{2}{n} \right)$$

$$= \left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times 90^\circ \right\}$$

$$\dots\dots(\text{答}) \quad \boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}}$$

問3

$$2\alpha \times k = 360^\circ \text{ より}$$

$$2 \left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times 90^\circ \right\} \times k = 360^\circ$$

$$180^\circ \times \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times k = 360^\circ$$

$$\left(1 - \frac{2}{n} \right) \times k = 2$$

$$(n-2)k = 2n$$

$$nk - 2n - 2k = 0$$

$$(n-2)(k-2) = 4$$

n, k は 3 以上の整数であるから

$$n-2 \geq 1, \quad k-2 \geq 1$$

であることに注意して

$$(n-2, k-2) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$(n, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$$

求めるのは $(6, 3)$ 以外の組なので

$$(n, k) = (3, 6), (4, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

問4

3つの正多角形の頂点が、すきまも重なりもなく1点 O_3 に集まっているとする。

(i) O_3 の周りの角の和を考えて

$$2 \left\{ \left(1 - \frac{2}{\ell} \right) \times 90^\circ \right\} + 2 \left\{ \left(1 - \frac{2}{m} \right) \times 90^\circ \right\} + 2 \left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times 90^\circ \right\} = 360^\circ$$

$$\left(1 - \frac{2}{\ell} \right) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) + \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 2$$

$$\frac{2}{\ell} + \frac{2}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) (i) より, $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{1}$

$\ell = 4$ のとき

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$$

$$mn - 4m - 4n = 0$$

$$(m-4)(n-4) = 16$$

$l=4 \leq m \leq n$ より

$$0 \leq m-4 \leq n-4$$

であることに注意して

$$(m-4, n-4) = (1, 16), (2, 8), (4, 4)$$

$$(m, n) = (5, 20), (6, 12), (8, 8)$$

……(答)

(iii) $0 < l \leq m \leq n$ より

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{l} \quad (\because \textcircled{1} \text{より})$$

$$\therefore l \leq 6$$

すなわち, $l=3, 4, 5, 6$

• $l=3$ のとき, ①に $l=3$ を代入して

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$$

$$6n + 6m = mn$$

$$mn - 6m - 6n = 0$$

$$(m-6)(n-6) = 36$$

$3 \leq m \leq n$ より, $-3 \leq m-6 \leq n-6$ である
ことに注意して

$$(m-6, n-6) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), \\ (4, 9), (6, 6)$$

$$(m, n) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), \\ (10, 15), (12, 12)$$

• $l=4$ のとき, (ii) より, 組の個数は 3 である。

• $l=5$ のとき

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{10}$$

$$3mn - 10m - 10n = 0$$

$$mn - \frac{10}{3}m - \frac{10}{3}n = 0$$

$$\left(m - \frac{10}{3}\right)\left(n - \frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$$

$$(3m-10)(3n-10) = 100$$

$l=5 \leq m \leq n$ より, $5 \leq 3m-10 \leq 3n-10$ であることに注意して

$$(3m-10, 3n-10) = (5, 20), (10, 10)$$

$$(m, n) = (5, 10) \quad (\because m, n \text{ は整数})$$

• $l=6$ のとき

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$$

$$mn - 3m - 3n = 0$$

$$(m-3)(n-3) = 9$$

$l=6 \leq m \leq n$ より, $3 \leq m-3 \leq n-3$ である
ことに注意して

$$(m-3, n-3) = (3, 3)$$

$$(m, n) = (6, 6)$$

以上より, $5+3+1+1=10$ 組 ……(答)

